Vectoranalyse

Hertentamen 3 juli 2006

Zet op elk ingeleverd vel duidelijk je naam en studentnummer. Er zijn in totaal 4 opgaven. De nummers tussen haakjes geven het aantal punten voor die opgave.

$$\text{Cijfer} = 1 + \frac{\text{aantal punten}}{3}.$$

Opgave 1 Laat het oppervlak S gegeven zijn door de vergelijking $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ en laat $f(x, y, z) = xy + z$.

(a) (3) Bepaal met de methode van Lagrange multiplicatoren de extremen van f beperkt tot S. (N.B. Doe dit niet zonder Lagrangemultiplicatoren).

(b) (4) Bepaal de aard van deze extremen met behulp van een tweede-orde test.

Opgave 2 Gegeven is de integraal

$$I = \int_1^2 \int_{\log y}^{ay} y dx dy,$$

waarbij $a = \frac{1}{2}\log 2$.

(a) (1) Schets het integatiegebied.

(b) (2) Bereken I (zonder de integratievolgorde te verwisselen).

(c) (3) Bereken I door verwisseling van de integratievolgorde.

Opgave 3

(a) (1) Formuleer de stelling van *Green.*

(b) (3) Stel dat $f : D \to \mathbb{R}$ met $D \subset \mathbb{R}^2$ *harmonisch* is, dat wil zeggen dat

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

op D. Bewijs dat

$$\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy = 0.$$

(c) (3) Laat $A(D)$ het oppervlak zijn van een domein D in $\mathbb{R}^2$ (neem aan dat de rand van D glad is). Bewijs aan de hand van de stelling van Green dat

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx.$$

(d) (3) Laat D het domein zijn ingesloten door de kromme K gegeven door $x = r(\theta)\cos(\theta)$, $y = r(\theta)\sin(\theta)$, waarbij $r(\theta) = 3\sin(2\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Geef een schets van K en bereken aan de hand van het vorige onderdeel het oppervlak dan D.

Opgave 4

(a) (1) Formuleer de stelling van *Stokes*.

(b) (3) Laat S het halve boloppervlak zijn gegeven door $x^2+y^2+z^2 = 1$, $z \geq 0$, en laat het vectorveld $\mathbf{F}$ gegeven zijn door

$$\mathbf{F} = -y(x^2+y^2)\mathbf{i} + x(x^2+y^2)\mathbf{j}.$$

Bereken met behulp van de stelling van Stokes:

$$\int\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$